

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**  
**Departamento de Engenharia de Construção Civil**

ISSN 0103-9830  
**BT/PCC/490**

---

**Um novo método para resolução de problemas  
de tangências.**

---

**Rovilson Mafalda**  
**Alexandre Kawano**

**São Paulo – 2008**

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Construção Civil  
Boletim Técnico – Série BT/PCC

Diretor: Prof. Dr. Ivan Gilberto Sandoval Falleiros  
Vice-Diretor: Prof. Dr. José Roberto Cardoso

Chefe do Departamento: Prof. Dr. Orestes Marracini Gonçalves  
Suplente do Chefe do Departamento: Prof. Dr. Alex Kenya Abiko

Conselho Editorial  
Prof. Dr. Alex Abiko  
Prof. Dr. Francisco Ferreira Cardoso  
Prof. Dr. João da Rocha Lima Jr.  
Prof. Dr. Orestes Marracini Gonçalves  
Prof. Dr. Paulo Helene  
Prof. Dr. Cheng Liang Yee

Coordenador Técnico  
Prof. Dr. Alex Kenya Abiko

O Boletim Técnico é uma publicação da Escola Politécnica da USP/ Departamento de Engenharia de Construção Civil, fruto de pesquisas realizadas por docentes e pesquisadores desta Universidade.

Este texto faz parte da tese de doutorado de título “Um novo método para resolução de problemas de tangências”, que se encontra à disposição com os autores ou na biblioteca da Engenharia Civil.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Mafalda, Rovilson  
Um novo método para resolução de problemas de tangências. –  
São Paulo : EPUSP, 2008.  
14 p. – (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP,  
Departamento de Engenharia de Construção Civil, BT/PCC/490)

1. Problemas de tangências 2. Problemas de apolônio 3. Inversão 4.  
I. Kawano, Alexandre II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.  
Departamento de Engenharia de Construção Civil III. Título IV. Série  
ISSN 0103-9830

# Um novo método para resolução de problemas de tangências

Rovilson MAFALDA<sup>1</sup> e Alexandre KAWANO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Depto de Engenharia de Construção Civil    <sup>2</sup>Depto de Engenharia Mecatrônica

**ABSTRACT:** Tangency problems can be summarised in this way: as we have three elements, combinations of point, line or circumference, find a circumference or circumferences that can be tangent with the three given. The most difficult case is the one wich the three given elements are circumferençes, because eight solutions are possible. It is proposed a method for solving this problem with ruler and compass by transforming them by conformal transformations. The method shown here brings new light on old problems and induce the posing of new questions.

**Keywords:** Tangency problems, Apollonius problem, Inversion.

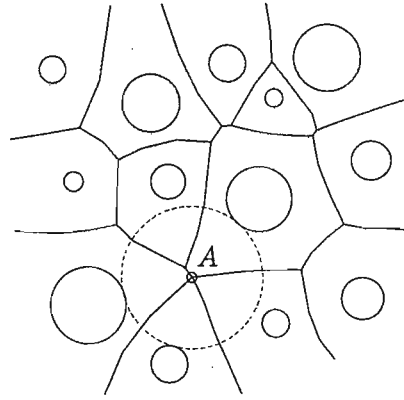
**RESUMO:** Neste estudo é proposto um método para resolução de problemas de tangências, especificamente para o décimo caso do problema de Apolônio. Este método é baseado na transformação geométrica inversão e no uso do conceito de feixes de circunferências. Além de permitir a resolução de todas as configurações do problema, ele é aplicável também à resolução de outros problemas.

**Palavras chave:** Problemas de tangências, Problema de apolônio, Inversão.

## 1.Introdução

Problemas de tangências são freqüentes na Engenharia em situações como: cálculos de polias e engrenagens. Recentemente, métodos de resolução de problemas de tangência voltaram a receber atenção por causa de sua aplicação na construção de um diagrama de Voronoi para conjuntos de circunferências. Esses diagramas têm aplicações, por exemplo, em problemas de caminhos mais curtos e empacotamento de cabos. Dado um conjunto  $S$  de circunferências externas, a construção de um diagrama de Voronoi consiste em determinar para cada circunferência  $C$  de  $S$  qual é a região dos pontos do plano que estão mais próximos a ela do que de qualquer outra em  $S$  como ilustra a figura 1 (KIM D. ; SUGIHARA, 2001).

A construção de um vértice do diagrama de Voronoi é exatamente o problema de se encontrar o centro da circunferência que é tangente externa a três outras circunferências dadas. Por exemplo, o vértice  $A$  na figura 1. Neste caso, as arestas do diagrama são



**Figure 1:** Diagrama de Voronoi para um conjunto de circunferências.

arcos das hipérboles. A obtenção dos vértices segundo (KIM D. ; SUGIHARA, 2001) é usualmente feita por cálculos computacionais para achar a intersecção das hipérboles que são os lugares geométricos de equidistância entre duas circunferências. Esse é um processo computacionalmente caro. Talvez por isso, recentemente os mesmos autores, (KIM D. ; SUGIHARA, 2006) propuseram que a resolução deste problema fosse feita com base em duas transformações: uma delas, é chamada por eles de *radius adjustment* (ajustamento de raios) e a outra é a inversão. A autoria deste método é em geral creditada a August Ferdinand Moebius (1790 - 1868). Este método pode ser de solução pode ser resumido no seguinte:

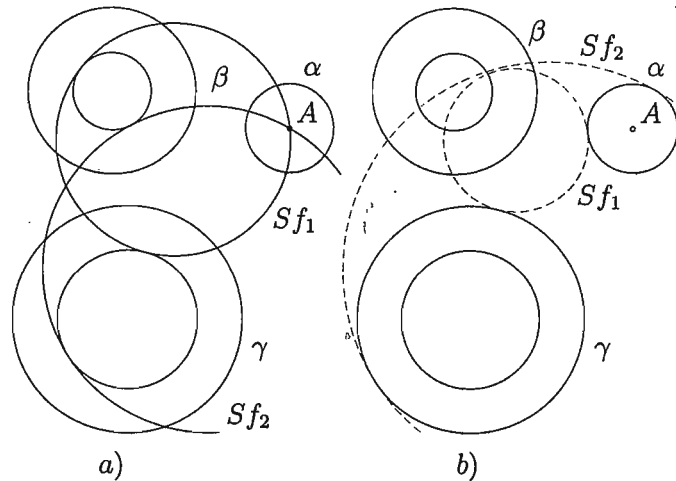
**Problema 1.** Construir circunferências tangentes a três circunferências  $\alpha_{(A,r_1)}$ ,  $\beta_{(B,r_2)}$  e  $\gamma_{(C,r_3)}$  com centros distintos, externas e não secantes, cujas relações entre os raios são  $r_1 < r_2 < r_3$ .

A transformação de ajustamento de raios é a seguinte: toma-se a circunferência de menor raio, neste caso  $\alpha$ , e subtrai-se o valor  $r_1$  de seu raio. Seja  $\alpha_1$  a circunferência de raio nulo e centro no ponto  $A$ . Para que as circunferências que são tangentes à  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  mantenham-se tangentes a elas,  $\beta$  e  $\gamma$  devem ter, conforme o caso, seus raios aumentados ou diminuídos do valor  $r_1$ . O problema inicial é transformado em quatro sub-problemas. Encontrar circunferências que passam pelo ponto  $A$  e sejam tangentes às circunferências  $\beta_{(B,r_2 \pm r_1)}$  e  $\gamma_{(C,r_3 \pm r_1)}$ . Seja o sub-problema:

**Sub-problema 1.** Construir circunferências que passam pelo ponto  $A$  e sejam tangentes às circunferências  $\beta_2 = \beta_{(B,r_2-r_1)}$  e  $\gamma_2 = \gamma_{(C,r_3-r_1)}$ .

Utilizando a transformação geométrica inversão, o problema é reduzido à construção das retas tangentes às circunferências transformadas. Como elas são não-secantes, existem quatro retas tangentes a elas, e o sub-problema tem quatro soluções. Quando

se volta ao problema inicial, é necessário descartar duas das soluções obtidas como mostra a figura 2, pois ao fazer o ajustamento dos raios  $Sf_1$  e  $Sf_2$  não são soluções do problema original. Isso significa que no problema original com as três circunferências, devemos descartar oito soluções falsas. Outras informações sobre este método podem ser vista na referência (COOLIDGE, 1916).



**Figure 2:** Ajustamentos de raios: soluções falsas.

No método de Joseph Diaz Gergonne (PAPELIER, 1925), as soluções também são obtidas com o uso da transformação inversão. Esse método pode ser resumido no seguinte: encontram-se os centros de homotetia das circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Os seis pontos encontrados determinam quatro retas,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  e  $\Theta_4$ , chamadas de eixos de homotetia. O próximo passo é encontrar os pólos dos eixos de homotetia em relação às circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Por serem quatro retas, são obtidos doze pólos, sendo quatro no interior de cada circunferência. Na figura 3, mostramos os pólos do eixo  $\Theta_3$ . Depois, os pólos são unidos com o centro radical,  $E$ , das três circunferências. As retas que unem os pólos ao centro radical determinam em cada uma das três circunferências oito pontos. Os vinte e quatro pontos totais obtidos são os pontos de tangência das oito soluções do problema. A figura 3, ilustra a obtenção de duas soluções  $S_1$  e  $S_2$ . Outras informações sobre este método podem ser vista na referência (COOLIDGE, 1916).

Neste trabalho propomos um método para resolver o problema 1 usando apenas uma transformação geométrica, a inversão. Mais do que oferecer um método alternativo aos métodos existentes para resolver este problema, o objetivo é mostrar o potencial do Desenho Geométrico para o estudo de problemas práticos. Desenvolvemos um método que permite a resolução de todas as configurações do problema com base no conceito de feixe de circunferências e da transformação geométrica inversão. A vantagem em relação ao método de Meobius é que o problema é resolvido exclusivamente

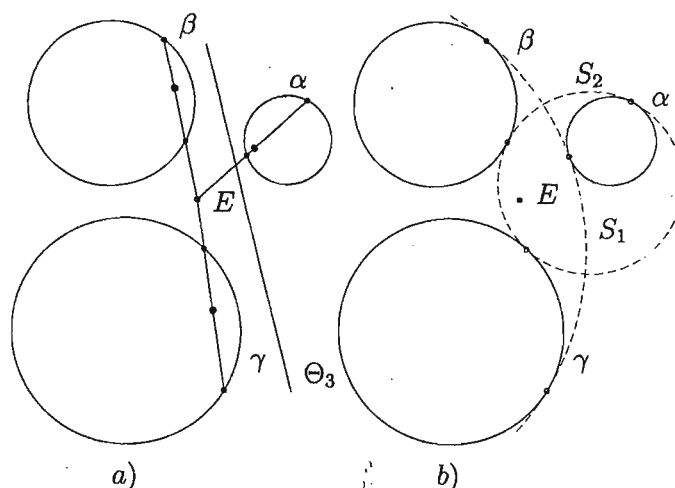


Figure 3: a) Pólos do eixo  $\Theta_3$  b) Pontos de tangência.

pela inversão. Em relação aos métodos de Gergonne e Moebius, ele pode ser aplicado para resolver o problema de se transformar três circunferências de raios distintos em três outras de mesmo raio.

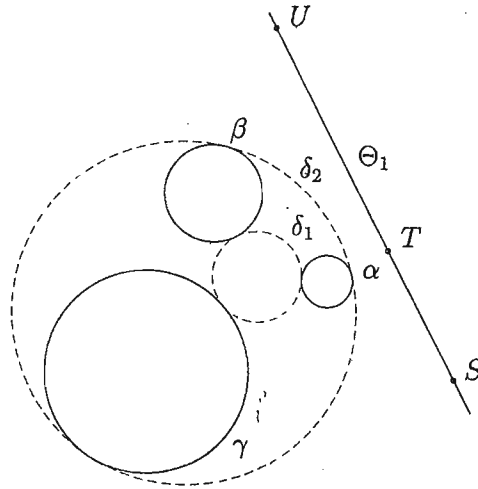
## 2. Problemas de tangências

Boas referências para a transformação geométrica inversão e para feixes de circunferências são: (COXETER H. S. ; GREITZER, 1967), (ALTSHILLER-COURT, 1952) e (JONHSON, 1960). Seja o problema 1. As circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem ser internas ou externas a uma determinada solução. Por isso, existem oito soluções. Vamos analisar agora o que ocorre com as oito soluções do problemas quando as circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são invertidas por uma circunferência que é ortogonal a elas.

Seja  $Z$  o centro radical de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Seja  $\phi$  a circunferência que é ortogonal a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Quando  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são invertidas em relação a  $\phi$ , as inversas  $\alpha'$ ,  $\beta'$  e  $\gamma'$  coincidem com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Como existem oito soluções, quatro delas são invertidas nas outras quatro. Sejam  $\delta_1, \delta_3, \delta_5$  e  $\delta_7$  quatro soluções. Sejam  $\delta_2, \delta_4, \delta_6$  e  $\delta_8$  as outras quatro soluções. A circunferência  $\delta_2$  é inversa de  $\delta_1$ . A circunferência  $\delta_4$  é inversa de  $\delta_3$ . A circunferência  $\delta_6$  é inversa de  $\delta_5$ . A circunferência  $\delta_8$  é inversa de  $\delta_7$ . Cada um dos pares de soluções forma um feixe de circunferências. Como a circunferência  $\phi$  inverte as circunferências soluções duas a duas, circunferência  $\phi$  pertence aos quatro feixes de circunferências formados.

Vamos mostrar agora que o eixo direto de homotetia  $\Theta_1$  coincide com o eixo radical definido pelas soluções  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . A solução  $\delta_1$  é externa às circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

As circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são internas à solução  $\delta_2$  como mostra a figura 4.



**Figure 4:** Eixo de homotetia e eixo radical; caso 1

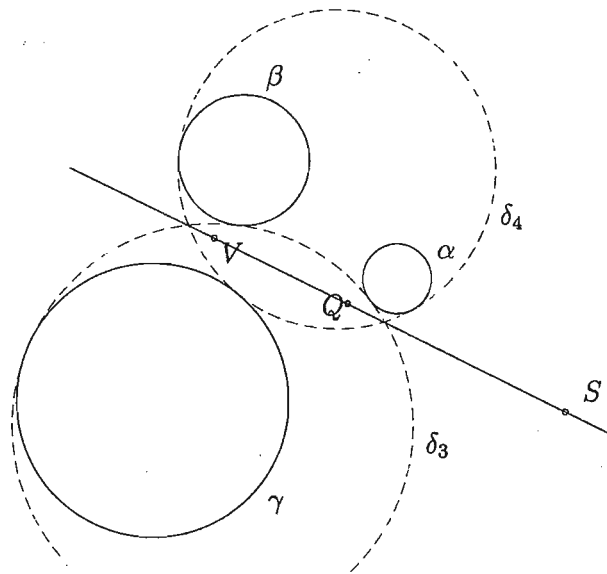
Seja  $S$  o centro da circunferência de inversão  $\sigma_1$ , que transforma  $\alpha$  em  $\beta$ . Seja  $T$  o centro da circunferência de inversão  $\sigma_2$ , que transforma  $\alpha$  em  $\gamma$ . Seja  $U$  o centro da circunferência de inversão  $\sigma_3$ , que transforma  $\beta$  em  $\gamma$ . Note que o ponto  $S$  é o centro da homotetia direta que transforma  $\alpha$  em  $\beta$ . Note que o ponto  $T$  é o centro da homotetia direta que transforma  $\alpha$  em  $\gamma$ . Note que o ponto  $U$  é o centro da homotetia direta que transforma  $\beta$  em  $\gamma$ .

Seja  $A$  um ponto na circunferência  $\alpha$ . Seja  $B$  o ponto inverso de  $A$  na circunferência  $\beta$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_1$ . Seja  $C$  o inverso do ponto  $A$  na circunferência  $\gamma$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_2$ . Seja  $\omega_1$  a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Toda circunferência que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  intercepta  $\alpha$  e  $\beta$  sob o mesmo ângulo. Toda circunferência que passa pelos pontos  $C$  e  $A$  intercepta  $\gamma$  e  $\alpha$  sob o mesmo ângulo. Logo, a circunferência  $\delta_i$  intercepta  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob o mesmo ângulo. Seja  $D$  um ponto na circunferência  $\alpha$ . Seja  $E$  o ponto inverso de  $A$  na circunferência  $\beta$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_1$ . Seja  $F$  o inverso do ponto  $A$  na circunferência  $\gamma$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_2$ . Seja  $\omega_2$  a circunferência que passa pelos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Do mesmo modo, a circunferência  $\omega_2$  intercepta  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob o mesmo ângulo.

A circunferência  $\sigma_1$  é ortogonal à  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . O eixo radical de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  passa pelo ponto  $S$ . A circunferência  $\sigma_2$  é ortogonal à  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . O eixo radical de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  passa pelo ponto  $T$ . A circunferência  $\sigma_3$  é ortogonal à  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . O eixo radical de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  passa pelo ponto  $U$ . Logo, os pontos  $S$ ,  $T$  e  $U$  estão alinhados. Conclui-se que as circunferências que interceptam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob ângulos iguais e passam por pontos inversos segundo

$\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  pertencem ao mesmo feixe de circunferências e têm  $\Delta_1 = \Theta_1$  como eixo radical. Esse é caso das soluções  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

Essa parte da demonstração é idêntica a que é utilizada no método de Jean Victor Poncelet (1788 - 1867) para resolver o problema 1 (PAPELIER, 1925), exceto pela construção dos argumentos. O método de Poncelet permite obter duas soluções, mas segundo a referência (FRÈRE, 1912), ele foi completado por outro estudioso. Entretanto, não tivemos acesso a este complemento. O fato de que os eixos de homotetia coincidem com os eixos radicais dos pares de soluções é conhecido e utilizado, por exemplo na referência (GISH D.; RIBANDO, 2004), mas não encontramos referência que contém esta demonstração. Fazemos então a nossa continuação. Vamos mostrar que o eixo inverso de homotetia  $\Theta_2$  coincide com o eixo radical definido pelas soluções  $\delta_3$  e  $\delta_4$ . A solução  $\delta_3$  é externa às circunferências  $\alpha, \beta$  e interna à  $\gamma$ . A solução  $\delta_4$  é interna às circunferências  $\alpha, \beta$  e externa à circunferência  $\gamma$ . Logo, o feixe formado por  $\delta_3$  e  $\delta_4$  é interceptante como ilustra a figura 5.



**Figure 5:** Eixo de homotetia e eixo radical; caso 2

Seja  $Q$  o centro da circunferência de inversão negativa  $\sigma_4$ , que transforma  $\alpha$  em  $\gamma$ . Seja  $V$  o centro da circunferência de inversão negativa  $\sigma_5$ , que transforma  $\beta$  em  $\gamma$ . O ponto  $Q$  é o centro da homotetia inversa que transforma  $\alpha$  em  $\gamma$ . O ponto  $V$  é o centro da homotetia inversa que transforma  $\beta$  em  $\gamma$ . Seja  $G$  um ponto na circunferência  $\alpha$ . Seja  $H$  o ponto inverso de  $G$  na circunferência  $\beta$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_1$ . Seja  $I$  o inverso negativo do ponto  $G$  na circunferência  $\gamma$ , obtido pela circunferência de inversão negativa  $\sigma_4$ .

Seja  $\omega_3$  a circunferência que passa pelos pontos  $G, H$  e  $I$ . Toda circunferência



que passa pelos pontos  $G$  e  $H$  intercepta  $\alpha$  e  $\beta$  sob o mesmo ângulo. Toda circunferência que passa pelos pontos  $H$  e  $I$  intercepta  $\gamma$  e  $\alpha$  sob o mesmo ângulo. Logo, a circunferência  $\omega_3$  intercepta  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob o mesmo ângulo.

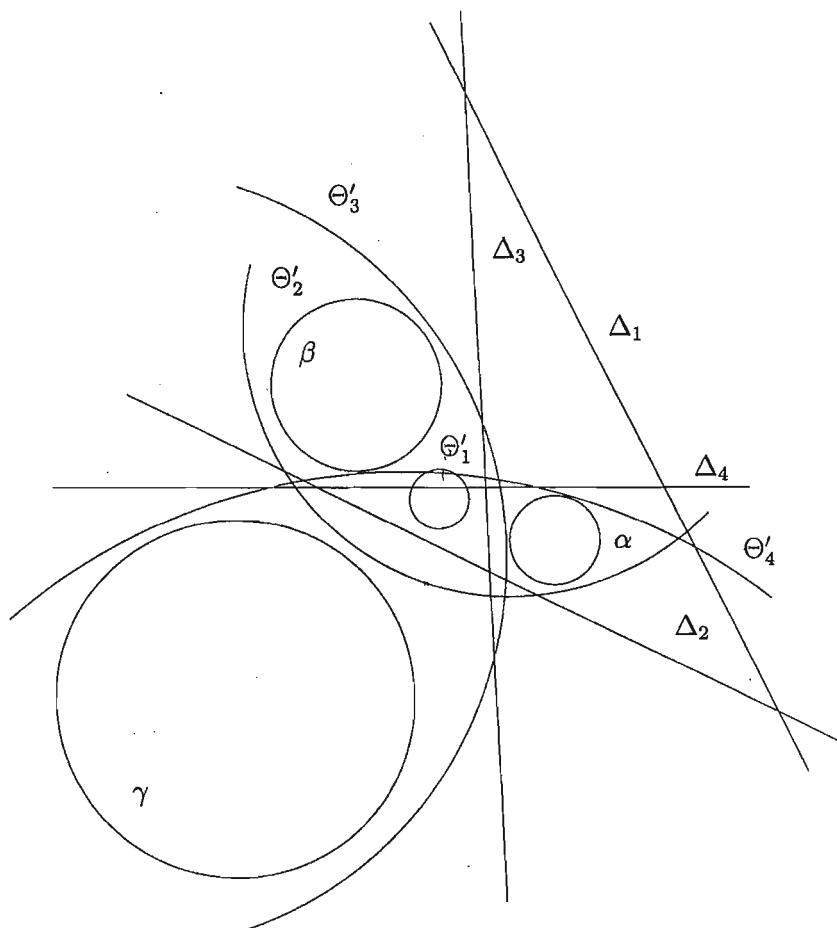
Seja  $J$  um ponto na circunferência  $\alpha$ . Seja  $K$  o ponto inverso de  $J$  na circunferência  $\beta$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_1$ . Seja  $L$  o inverso do ponto  $J$  na circunferência  $\gamma$ , obtido pela circunferência de inversão negativa  $\sigma_4$ . Seja  $\omega_4$  a circunferência que passa pelos pontos  $J$ ,  $K$  e  $L$ . Do mesmo modo, a circunferência  $\omega_4$  intercepta  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob o mesmo ângulo.

A circunferência  $\sigma_1$  é ortogonal à  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . O eixo radical de  $\omega_3$  e  $\omega_4$  passa pelo ponto  $S$ . A circunferência  $\sigma_4$  intercepta  $\omega_3$  e  $\omega_4$  sob o mesmo ângulo. Logo,  $\omega_3$  e  $\omega_4$  coincidem com suas inversas negativas. Como elas são fixas na inversão negativa por  $\sigma_4$ , a potência do ponto  $Q$  para elas  $r_{\sigma_4}^2$ . Logo,  $Q$  está numa corda comum dessas circunferências. Logo, o eixo radical de  $\omega_3$  e  $\omega_4$  passa pelo ponto  $Q$ .

A circunferência  $\sigma_5$  intercepta  $\omega_3$  e  $\omega_4$  sob o mesmo ângulo. Logo,  $\omega_3$  e  $\omega_4$  coincidem com suas inversas negativas. Como elas são fixas na inversão negativa por  $\sigma_5$ , a potência do ponto  $V$  para elas  $r_{\sigma_5}^2$ . Logo,  $V$  está numa corda comum dessas circunferências. Logo, o eixo radical de  $\omega_3$  e  $\omega_4$  passa pelo ponto  $V$ . Logo, os pontos  $S$ ,  $Q$  e  $V$  estão alinhados. Conclui-se que as circunferências que interceptam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob ângulos iguais, passam por pontos inversos segundo  $\sigma_1$  e pontos inversos negativos segundo  $\sigma_4$  e  $\sigma_5$ , pertencem ao mesmo feixe de circunferências e têm  $\Delta_2 = \Theta_2$  como eixo radical. Esse é caso das soluções  $\delta_3$  e  $\delta_4$ .

A verificação de que o eixo inverso de homotetia  $\Theta_3$  coincide com o eixo radical do feixe formado pelas soluções  $\delta_5$  e  $\delta_6$  é idêntica a que foi realizada para o eixo de homotetia  $\Theta_2$  pois são feixes secantes. Isso vale também para o eixo de homotetia  $\Theta_4$  em relação às soluções  $\delta_7$  e  $\delta_8$ .

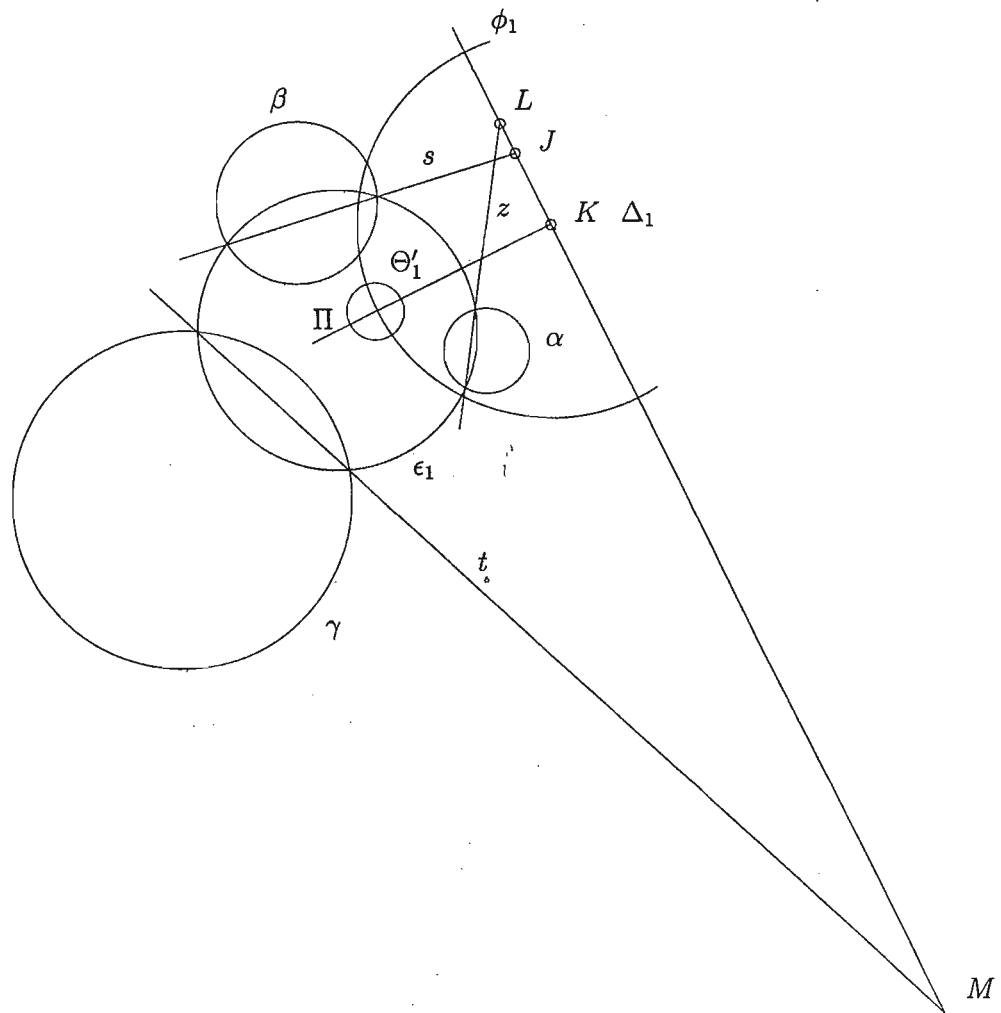
Tendo demonstrado que os eixos radicais dos feixes que contém as soluções coincidem com os eixos de homotetia, vamos apresentar agora nosso método de solução. O primeiro passo é inverter as circunferências dadas tomando cuidado de verificar que as inversas sejam circunferências que possuam raios diferentes. Depois, encontramos os eixos de homotetia das três circunferências inversas. Como estes eixos coincidem com o eixos radicais que contém as soluções para as circunferências inversas, ao invertermos de volta teremos circunferências que pertencem aos feixes que contém as soluções para o problema inicial. Encontramos nos eixos radicais dos feixes definidos, pontos que são equipotentes às circunferências do feixe e as circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Feito isso, construímos as retas tangentes às circunferências iniciais e encontramos os pontos de tangências procurados.



**Figure 6:** Determinação dos feixes de circunferências.

**Construção 1.** Seja o problema 1. Primeiro, invertamos as circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  em relação a uma circunferência de inversão arbitrária  $\sigma_{(O,r)}$  de modo resulte em três circunferências  $\alpha'_{(A,r_1)}$ ,  $\beta'_{(B,r_2)}$  e  $\gamma'_{(C,r_3)}$ , cujos raios são  $r_1 < r_2 < r_3$ . Sejam  $\alpha'$ ,  $\beta'$  e  $\gamma'$  as inversas de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  em relação a  $\sigma_{(O,r)}$ . Sejam  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  e  $\Theta_4$ , os eixos de homotetia das circunferências  $\alpha'$ ,  $\beta'$  e  $\gamma'$ . Sejam  $\Theta'_1$ ,  $\Theta'_2$ ,  $\Theta'_3$  e  $\Theta'_4$  os inversos das retas  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  e  $\Theta_4$ .

Sejam  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  e  $\Delta_4$  os eixos radicais dos feixes que contém as soluções. Seja  $\Theta'_1\Delta_1$  o feixe determinado pela circunferência  $\Theta'_1$  e pela reta  $\Delta_1$  como ilustra a figura 6. Para construir as soluções associadas a este feixe precisamos encontrar pontos no eixo radical  $\Delta_1$  que sejam equipotentes às circunferências do feixes e às circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Seja  $\Pi$  a reta que passa pelo centro de  $\Theta'_1$  e é perpendicular a  $\Delta_1$  no ponto  $K$ . Seja  $\phi_1$  uma circunferência ortogonal a circunferência  $\Theta'_1$  obtida pela construção de  $\phi_1$ . Como  $\Theta'_1$  é não secante às circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , seja  $\epsilon_1 \in \Delta_1\Theta'_1$  a circunferência secante a  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Note que  $\epsilon_1$  pertence ao feixe  $\Delta_1\Theta'_1$ .

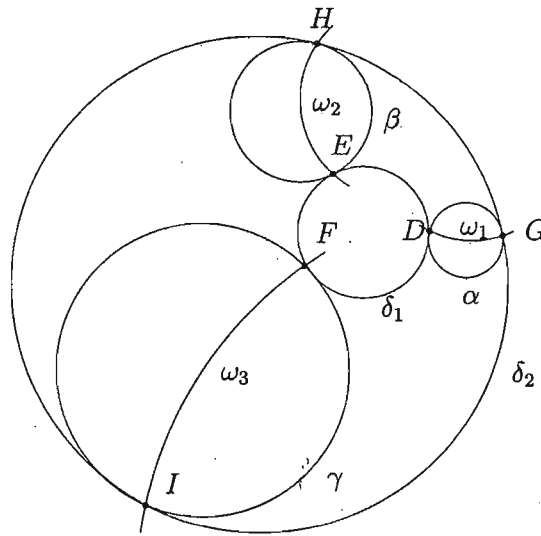


**Figure 7:** Soluções associadas ao feixe  $\Delta_1\Theta'_1$ .

Sejam  $J$ ,  $L$  e  $M$  os pontos de intersecção das retas  $s$ ,  $z$  e  $t$ , definidas pelas cordas resultantes da intersecção de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  com  $\epsilon_1$ . Sejam  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  as circunferências cujos diâmetros são os segmentos  $\overline{AL}$ ,  $\overline{JB}$  e  $\overline{MC}$  respectivamente. Elas determinam os pontos  $D$  e  $E$ ;  $F$  e  $G$ ;  $H$  e  $I$  que são os pontos de tangência procurados. Por exemplo,  $D$ ,  $E$  e  $F$  formam uma solução e  $G$ ,  $H$  e  $I$  a outra.

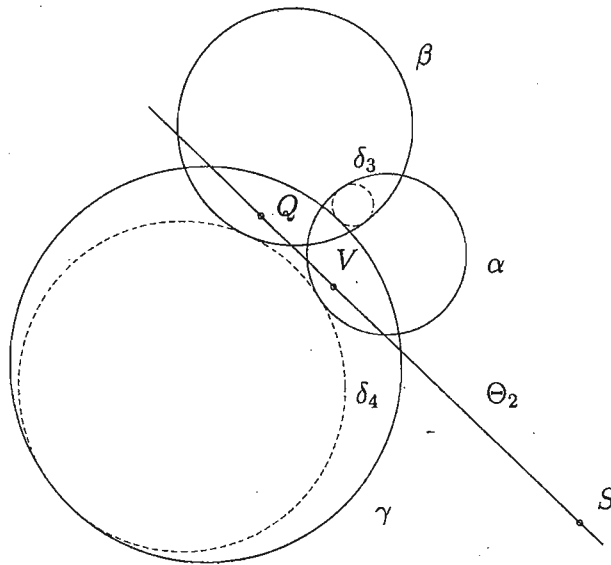
As outras soluções são obtidas do mesmo modo. Encontram-se pontos equipotentes às circunferências dadas e as circunferências dos outros feixes  $\Theta'_2\Delta_2$ ,  $\Theta'_3\Delta_3$  e  $\Theta'_4\Delta_4$  nos respectivos eixos radicais. Encontrados tais pontos constroem-se os pontos de tangência.

**Problema 2.** Construir circunferências tangentes à três circunferências  $\alpha_{(A,r_1)}$ ,  $\beta_{(B,r_2)}$  e  $\gamma_{(C,r_3)}$  com centros distintos, externas e secantes, cujas relações entre os raios são  $r_1 < r_2 < r_3$ .



**Figure 8:** Pontos de tangências procurados.

Neste problema vamos analisar o que muda no método de solução quando as circunferências dadas são secantes. A demonstração para o eixo externo de homotetia é a mesma mostrada para o problema 1. Vamos mostrar agora que o eixo inverso de homotetia  $\Theta_2$  coincide com o eixo radical definido pelas soluções  $\delta_3$  e  $\delta_4$ . A solução  $\delta_3$  mantém  $\alpha, \beta$  internas e  $\gamma$  externa. A solução  $\delta_4$  mantém  $\alpha, \beta$  externas  $\gamma$  interna como mostra a figura 9.



**Figure 9:** Eixo de homotetia e eixo radical; caso 3

Seja  $S$  o centro da circunferência de inversão  $\sigma_1$ , que transforma  $\alpha$  em  $\beta$ . Note que o ponto  $S$  é o centro da homotetia direta que transforma  $\alpha$  em  $\beta$ . Seja  $N$  o centro

da circunferência de inversão  $\sigma_4$ , que transforma  $\alpha$  em  $\gamma$ . Note que o ponto  $N$  é o centro da homotetia inversa que transforma  $\alpha$  em  $\gamma$ . Seja  $Q$  o centro da circunferência de inversão  $\sigma_5$ , que transforma  $\beta$  em  $\gamma$ . Note que o ponto  $Q$  é o centro da homotetia inversa que transforma  $\beta$  em  $\gamma$ .

Seja  $A$  um ponto na circunferência  $\alpha$ . Seja  $B$  o ponto inverso de  $A$  na circunferência  $\beta$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_1$ . Seja  $C$  o inverso do ponto  $A$  na circunferência  $\gamma$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_4$ . Seja  $\omega_3$  a circunferência que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Toda circunferência que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  intercepta  $\alpha$  e  $\beta$  sob o mesmo ângulo. Toda circunferência que passa pelos pontos  $C$  e  $A$  intercepta  $\gamma$  e  $\alpha$  sob o mesmo ângulo. Logo, a circunferência  $\omega$  intercepta  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob o mesmo ângulo.

Seja  $D$  um ponto na circunferência  $\alpha$ . Seja  $E$  o ponto inverso de  $D$  na circunferência  $\beta$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_1$ . Seja  $F$  o inverso do ponto  $A$  na circunferência  $\gamma$ , obtido pela circunferência de inversão  $\sigma_4$ . Seja  $\omega_4$  a circunferência que passa pelos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ . A circunferência  $\omega_4$  intercepta  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sob o mesmo ângulo. A circunferência  $\sigma_1$  é ortogonal à  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . O eixo radical de  $\omega_3$  e  $\omega_4$  passa pelo ponto  $S$ . A circunferência  $\sigma_4$  é ortogonal à  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . Logo, o ponto  $V$  pertence ao eixo radical de  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . A circunferência  $\sigma_3$  é ortogonal à  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . Logo, o ponto  $Q$  pertence ao eixo radical de  $\omega_3$  e  $\omega_4$ . Logo, os pontos  $S$ ,  $Q$  e  $V$  estão alinhados e definem o eixo radical  $\Delta_2 = \Theta_2$ .

Para os outros feixes restantes o raciocínio é análogo. Tendo demonstrado que os eixos radicais dos feixes que contém as soluções coincidem com os eixos de homotetia das circunferências dadas, o procedimento de resolução é o mesmo do problema 1. Quando as circunferências  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  possuem raios iguais o eixo externo de homotetia não está definido. As soluções associadas a este eixo de homotetia são circunferências concêntricas.

Com o método proposto resolvemos todas as configurações do décimo caso do problema de Apolônio, e também outros dois problemas clássicos de uma maneira original. Outros métodos, como o de Gergonne, permitem a obtenção das soluções para todas as configurações, mas o método proposto tem a vantagem de resolver outros problemas. Acreditamos que o novo método de resolução do problema de Apolônio pode ser utilizado para resolução de problemas em Engenharia e particularmente na construção de diagramas de Voronoi com relativo sucesso.

# Referências

ALTSHILLER-COURT, N. *College Geometry: An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*. New York, 2ª edição: Barnes and Noble Inc., 1952. (Barnes and Noble College Outline Series).

COOLIDGE, J. L. *A treatise on the circle and the sphere*. Oxford: Clarendon Press, 1916.

COXETER H. S. ; GREITZER, S. L. *Geometry revisited*. Toronto: Randon House, 1967.

FRÈRE, G.-M. *Exercices de Géométrie*. Paris: J. de Gigord, número 267, 1912. (Cours de Mathématiques Élémentaires).

GISH D. ; RIBANDO, J. M. Apollonius problem: A study of solutions and their connections. *American Journal of Undergraduate Research*, v. 3, n. 1, p. 15–26, 2004.

JONHSON, R. A. *Advanced Euclidian Geometry: An elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle*. New York: Dover Publications, Inc., 1960.

KIM D. ; SUGIHARA, K. Voronoi diagram of a circle set from voronoi diagram of a point set: ii. geometry. *Computer Aided Geometric Design*, v. 18, n. 6, p. 563–585, 2001.

KIM D. ; SUGIHARA, K. Apollonius tenth problem via radius adjustment and Möbius transformations. *Computer-Aided Design*, v. 38, p. 14–21, 2006.

PAPELIER, G. *Exercices de Géométrie Moderne*. Paris: Librairie Vuibert, 1925.